计算机网络病毒传播

教学目的和要求:

通过病毒在网络上的随机传播问题的分析过程，使学生：

1、 了解图论模型在现实生活中的应用；

2、 了解如何应用随机思想和方法分析、处理实际问题；

3、 体会学好数学知识的重要性；

4、 激发学习数学和探究数学的兴趣。

计划学时： 1-2学时

知识点： 图的模型、几何分布、数学期望。

必备技能：

1. 无穷级数求和技巧
2. 计算数学期望

主要内容

1．应用场景

2．问题的假设

3．问题分析及模型建立

4．课外任务

1. 应用场景

因特网的产生与发展让人们的生活发生了革命性的改变。计算机网络给人们的生活带来了便利的同时，计算机病毒也有了新的发展空间，在这种情况下，计算机网络病毒应运而生。假定计算机病毒传播的方式是随机的，即设某个时刻，有一台机器被感染上了病毒，与之相邻(连接)的多个机器在下一时刻必定有一台等可能地被感染。在某种给定的网络拓扑结构中，某一个节点被感染后，需要计算另外一个节点被感染的时间的平均值即数学期望值。需要建立病毒在网络上的随机传播的数学模型，并分析病毒随机传播的各种特性。

2. 问题的假设

1. 计算机网络可以用图来表示，对于小型网络，每台电脑作为图的节点，连接的网线可作为图的边；对于大型网络，则图中的节点代表交换机、路由器或连接到因特网的局域网，图中的边则是连接节点的通路。

2. 将时间离散化，每次考虑一个单位时间内发生的事件；

3. 病毒在一个有向连通图上进行传播，图中每个节点随时都可能被感染，并且一旦感染后不可清除；

4. 在单位时间内，一个节点假定被病毒感染，一定会将病毒传给它在图中与之相邻的多个节点中的一个，不考虑对方是否已经被感染。且被感染的节点不能在同一时刻向与它相连的多个节点传播；

5. 如果已经被病毒感染的节点存在多个相邻的节点，则等概率地选择其中一个节点被感染；

6．在每个单位时间内，图中所有被感染的节点可以随机地选择它们的一个相邻节点进行感染，并且哪个节点被感染是相互独立的。

3. 问题分析及模型建立

对于一个网络，它的拓扑结构抽象成一个图$G(V, E)$，假定它是一个连通无向图。根据模型假定，如果某个节点已经被感染，由于各个节点之间是连通的，则图中的任何一个节点必然会在某个时刻被感染。设给定$v_0\in V$为初始时刻被感染的节点。据模型假定，如果某个节点已经被感染，由于各个节点之间是连通的，则图中的任何一个节点必然会在某个时刻被感染。设给定$v_0\in V$为初始时刻被感

染的节点，欲求另一个节点从开始到被感染所间隔时间的数学期望。分以下几种情况讨论：

1）直接传播（由节点v_0直接向节点v传播，记$v_0 \to v$）

由于时间被离散化，刻画时间以单位时间计。设X_v表示节点v被病毒侵蚀的单位时间个数，它的可能取值i为自然数，如果节点v有1/4的概率在第1个单位时间里被感染，则顶点v在第i个单位时间里被感染的可能性为

$$P\{X_v = i\} = \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right), i = 1, 2, \cdots,$$

即服从几何分布，由数学期望的定义知，节点v被感染的间隔时间的数学期望为：

$$T_v = E(X_v) = \sum_i i\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

下面需要确定节点v被感染的概率。设与节点$v_0 \in V$，相邻的节点数为的$d(v_0)$，由等可能性知，则在第一个单位时间里，节点v被感染的概率为$1/\ d(v_0)$，在第二个单位时间里，节点v 被感染的概率为

$$\frac{d(v_0)-1}{d(v_0)}\frac{1}{d(v_0)} \quad ,$$

在第三个单位时间里，节点v被感染的概率为

$$(\frac{d(v_0)-1}{d(v_0)})^2\frac{1}{d(v_0)} \quad ,$$

在第i个单位时间里，

$$P\{X_v = i\} = (\frac{d(v_0)-1}{d(v_0)})^{i-1}\frac{1}{d(v_0)}, i = 1, 2, \cdots 。$$

不难解出$T_v = E(X_v) = d(v_0)$。

2）间接传播（$v_0 \to v_j \to v$）

如果节点v_0与节点v不相邻，有m条路径$v_0 \to v_j \to v$，（j=1, 2, ⋯, m）则定义节点v被病毒感染的间隔时间的数学期望为：

$$T_v = \min_{1\le j\le m}\{E(X_v)+E(X_{v_j})\}$$

如果这m条路径的长度分别为l_j，将路径表示为：

$$v_0 \to v_j^k \to v, (j=1,2,\cdots,l_j, k=1,2,\cdots,m)$$

则定义节点v被病毒感染的间隔时间的数学期望为：

$$T_v = \min_{1\le j\le m}\{\sum_{k=1}^{l_j} E(X_{v_j^k})+E(X_v)\}$$

将间接传播途径转化为直接传播途径，就是将原来的无向图$G(V, E)$转化为一个赋权有向图$G'(V', E', W)$，在E'中，考虑两条有向边$e_1(u, v)$，$e_2(u, v)$，$u, v\in V'$，定义边权值为$W(e_1)=d(u)$，$W(e_2)=d(v)$，其中$d(u)$表示顶点u在图G中的度。由此可知，求任一个节点被感染时间的数学期望转化为寻找赋权有向图$G'(V', E', W)$中的相应两个点之间的最短路径的长度。

4. 课外任务

给出一个无向图$G(V, E)$如下：

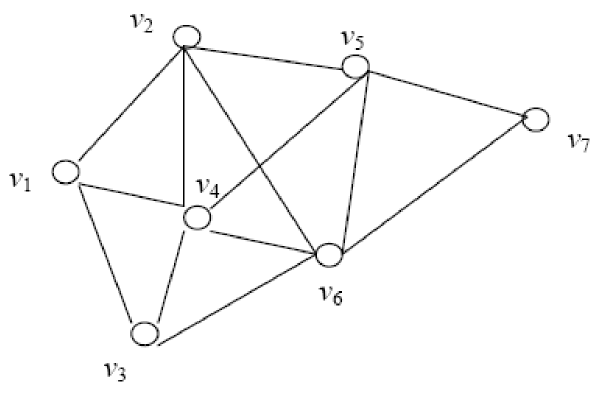

图1 计算机网络的拓扑结构

试计算从初始节点 v_1出发，其他节点被感染时间的数学期望。